数理解析研究所講究録
320巻 1978年 162-184

BMO Functions and Algebras on the Unit Disc

茨城大 理 林 実樹広

開単位円板 $U=\{|z|<1\}$ 上で有界正則な関数の境界値関数の全体を H^∞, 単位円周 $\partial U=\{|z|=1\}$ 上の Lebesgue 測度を $d\theta$ で表わす. $q \in H^\infty$ が $|q|=1$ a.e. $d\theta$ を満すとき, inner 関数と云われる.

1968年に, Douglas は次の予想を提出した:「H^∞を含む $L^\infty = L^\infty(d\theta)$ の (essential sup-norm に関して) closed な subalgebra B は inner 関数のある族 I の複素共役 $\{\bar{q} : q \in I\}$ と H^∞ によって生成されるか?」 この予想は, Douglas-Rudin (1969, Pacific J. Math.), Sarason (1973, Bull. Amer. Math. Soc.; 1975, Trans. Amer. Math. Soc.), Axler (preprint), Weight (1975, Bull. Amer. Math. Soc.), Chang (1977, Amer. J. Math.) によって部分的に解かれた. そして, 最終的には, Chang (1976, [1]) 及び Marshall (1976, [8]) によって肯定的に解決されたことは御存じの通りであります. しかしながら, 彼等の証明には, Fefferman-Stein [5] による BMO 関数の理論や Corona 問題を解いた Carleson の手法などが用いられていま

す．特に，[5]の場合R^n上で理論を展開しているため，単位円の場合との関係も確めて見る必要があるように思われます．

本講演はこの間の橋渡しをすることを，合せてBMO関数の理論の一部でも紹介できればということを目的に行なわせていただきました．なお，このノートの内容は，多くの部分でProfessor J. Garnettの講義（University of California, Los Angeles, 1976-77）に負うていることを付け加えておきます．

以下，このノートの内容を目次により示しておきます．

1. Douglas予想の周辺

Douglas予想は，Teoplitz operatorに関連して考えられたそうですが，これを関数環の問題として捕えた場合，どのような性格をもつものかをまず考えて見たい．

∂U上の複素数値連続関数の全体をC，Cの元でzの多項式

により一様近似される関数全体を A と書く．関数環 A は普通 disc algebra と呼ばれている．よく知られているように，Wermer (1953, Proc. Amer. Math. Soc.) は disc algebra A は C の中で極大であることを示した．すなわち，$A \subseteq B \subseteq C$ なる closed subalgebra B があれば，$A=B$ または $C=B$ に限るというのである．これに対して，Hoffman-Singer (1960, Acta Math.) は，H^∞ と L^∞ の間には (essential sup-norm に関して) closed な subalgebra が無限に沢山あることを示した．更に，B が H^∞ を真に含む closed subalgebra ならば，$H^\infty + C \subseteq B$ となることも示した (1962, [6])．従って，weakly* closed な subalgebra に限って考えれば，H^∞ は L^∞ で極大なっている：しかしながら，一方では norm closed な subalgebra が H^∞ と L^∞ の間に沢山あると云う訳である．その後，Sarason (1967, Trans. Amer. Math. Soc.) は代数和 $H^\infty + C$ が closed な subalgebra となることを示した．以上，わかったことを図示すると

$$
\begin{tikzcd}
H^\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dash, dotted] & H^\infty + C \arrow[r, dash, dashed] \arrow[d, dash, dotted] & L^\infty \\
A \arrow[r, dash] & C &
\end{tikzcd}
$$

という関係にある．ここで，―― 線の間には真の closed subalgebra は存在しない．又，換言すれば，Douglas 予想とは，H^∞ と L^∞ の間の closed subalgebra の特徴付けに関係しているとも云

うこともできる．

2. BMO関数

dm を $\mathbb{R}^n$（又は，∂U）上の Lebesgue測度とする．可測集合 E に対して，$|E| = dm(E)$ と書く．又，以下で $\mathbb{R}^n$ の正方形と云えば，座標軸に平行な辺をもつものに限ることとする．

局所可積分関数 f に対して，

$$\|f\|_* = \sup_I \frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I|\,dm, \qquad f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f\,dm$$

とおく．但，I は $\mathbb{R}^n$ の正方形（又は，∂U の弧）全体を走るものとする．$\|f\|_* < \infty$ となるとき，f は bounded mean oscilation をもつといい，略して，f は BMO関数とも云う．定義より，$L^\infty \subset \mathrm{BMO}$ となることはすぐわかる．又，次の性質も明らか：

1° $\|f+g\|_* \leq \|f\|_* + \|g\|_*$

2° $\|f + c\|_* = \|f\|_*$，$\|cf\|_* = |c|\,\|f\|_*$ $(c \in \mathbb{C})$

3° $\|f\|_* = 0$ ならば $f \equiv c$，$c \in \mathbb{C}$．

従って，$\mathrm{BMO}/\mathbb{C}$ は normed space である．更にこれが Banach space となることも示される（定理 2.6）．

補題 2.1.（Calderon - Zygmund 分解；$n=1$ のときは，F. Riesz による）関数 u を $\mathbb{R}^n$ の正方形 I_0 上で可積分で，

$$\frac{1}{|I_0|}\int_{I_0} |u|\,dm \leq C$$

とする．このとき，互いに交わらない閉正方形 $I_1, I_2, \cdots$ で，次の３つの性質をもつものが取れる：

a) $|u| \leq C$ a.e. on $I_0 \backslash (I_1 \cup I_2 \cup \cdots)$

b) $C < \dfrac{1}{|I_k|}\displaystyle\int_{I_k} |u|\, dm \leq 2^n C$

c) $\displaystyle\sum_{k \geq 1} |I_k| \leq \frac{1}{C}\int_{I_0} |u|\, dm.$

証明　まず I_0 の各辺を２等分するように，I_0 を 2^n 個の正方形に分割する．細分された正方形を以下同様に分割して行って，この途中に現われた閉正方形の全体を $\{\omega\}$ とする．そこで，$\{\omega\}$ の部分族を

$$\{I_k\} = \left\{ \omega : \frac{1}{|\omega|}\int_\omega |u|\, dm > C \quad \text{となる } \omega \text{ の中で極大} \right\}$$

とおけばよい．実際，I_k が互いに交わらないことは明らか．従って，c) はすぐわかる．I_k が ω の各辺を２等分して得られたとすれば，

$$\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k} |u|\, dm \leq \frac{2^n}{|\omega|}\int_\omega |u|\, du \leq 2^n C.$$

よって，b) が得られた．次に，$x \in I_0 \backslash (I_1 \cup I_2 \cup \cdots)$ かつ $x \notin \bigcup_\omega \partial\omega$ とすると，x を含むすべての ω に対して，

$$\frac{1}{|\omega|}\int_\omega |u|\, dm \leq C.$$

$|\bigcup_\omega \partial\omega| = 0$ であるから，これは $|u| \leq C$ a.e. on $I_0 \backslash (I_1 \cup I_2 \cup \cdots)$ を導びく．よって，a) も得られた．//

定理 2.2.（John－Nierenberg [7]）$f \in BMO$ とする．I を R^n

の正方形（又は，∂Uの弧）とすれば，

$$|\{x\in I : |f-f_I|>\lambda\}| \le c_1 |I| \exp\left(-\frac{c_2\lambda}{\|f\|_*}\right).$$

但，c_1，c_2は$\mathbb{R}^n$の次元nにのみ関係する定数．

<u>証明</u>　$\|f\|_*=1$として示せば十分．$E_{\lambda,I}=\{x\in I: |f-f_I| > \lambda\}$とおき，更に

$$F(\lambda) = \sup_I |E_{\lambda,I}|/|I|$$

とする．このとき，次の性質がある：

i)　$F(\lambda) \le \min(1, \frac{1}{\lambda})$

ii)　$F(\lambda_1) \le F(\lambda_2)$　if　$\lambda_1 \ge \lambda_2$

iii)　$F(\lambda + 2^n c) \le \frac{1}{c} F(\lambda)$　if　$c \ge 1$.

実際，i)とii)は容易に確められる．iii)を見るために，I_0を1つ固定する．$f_{I_0}=0$と仮定してよい．$\frac{1}{|I_0|}\int_{I_0}|f|dm \le \|f\|_* \le c$であるから，$I_0$のCalderon－Zygmund分解$I_1, I_2, \cdots$を考える．

前補題，a)より

$$E_{\lambda+2^n c, I_0} \subseteq \bigcup_{k\ge 1} I_k \quad \text{a.e.}$$

更に，前補題，b)により，$x\in E_{\lambda+2^n c, I_0}\cap I_k$ならば

$$|f(x) - f_{I_k}| \ge |f(x)| - \frac{1}{|I_k|}\int_{I_k}|f|dm \ge \lambda.$$

すなわち，$E_{\lambda+2^n c, I_0}\cap I_k \subseteq E_{\lambda, I_k}$を得る．故に，

$$|E_{\lambda+2^n c, I_0}| \le \sum_{k\ge 1} |E_{\lambda, I_k}| \le F(\lambda)\sum_{k\ge 1}|I_k|.$$

よって，前補題，c)によりiii)も示された．さて，$\lambda > 1$とすると，$1+k2^n e < \lambda \le 1+(k+1)2^n e$となる整数$k$が決まる．

ここで，ii) 及び，$c=e$ として iii) を用いれば

$$F(\lambda) \le F(1+k2^n e) \le e^{-1} F(1+(k-1)2^n e)$$
$$\le \cdots\cdots \le e^{-k} F(1).$$

i) より $F(1) \le 1$，又 $k \ge \lambda 2^{-n} e^{-1} - (2^{-n} e^{-1} + 1)$ であるから

$$F(\lambda) \le e^{2^{-n} e^{-1}+1} \exp(-\lambda 2^{-n} e^{-1})$$

この不等式は，$0 \le \lambda \le 1$ でも成立（$\because\ 2^{-n}e^{-1}+1 \ge \lambda e^{-n} e^{-1}$）．
よって求める不等式が得られた．//

系 2.3. f が R^n（又は，∂U）上の局所可積分関数ならば

$$\|f\|_*^p \le \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f-f_I|^p dm \le C_p \|f\|_*^p, \quad 1 \le p < \infty.$$

ここで，C_p は p 及び，次元 n にのみ関係した定数．

証明　才1の不等式は自明．才2の不等式を示す．I を一つ固定して，$m_I(\lambda) = |\{x \in I : |f-f_I| > \lambda\}|$ とおく．図形 $\{(x,\lambda) : 0 \le \lambda \le |f(x)-f_I|^p\}$ の面積と思って，Fubini の定理を使うと

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|^p dm = \frac{p}{|I|}\int_0^\infty m_I(\lambda)\lambda^{p-1} d\lambda$$
$$\le p\int_0^\infty C_1 e^{-C_2\lambda/\|f\|_*} \lambda^{p-1} d\lambda$$
$$= p C_1 C_2^{-p} \|f\|_*^p \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$$
$$= (p C_1 C_2^{-p} \Gamma(p)) \|f\|_*^p \quad //$$

系 2.4. $f \in BMO \Leftrightarrow$ ある（従って，すべての）$1 \le p < \infty$ が固

定されたとき，すべての正方形（又は，弧）Iに対して，数 $c_I \in \mathbb{C}$ があって

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f - c_I|^p dm \le M \quad (M \text{ はある定数}).$$

又，このとき，$\|f\|_*^p \le 2^p M$ が成立つ．

証明　必要性は明らか．十分を示めすには，最後の不等式を示めせばよい．実際，$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$ $(a, b \ge 0,\ 1 \le p < \infty)$ に注意すれば，任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I|^p dm \le 2^{p-1}\left(\frac{1}{|I|}\int_I |f-c|^p dm + |f_I - c|^p\right)$$

$$\le 2^p \frac{1}{|I|}\int_I |f-c|^p dm.$$

よって，前系により $\|f\|_*^p \le 2^p M$ を得る．//

補題 2.5.　$f \in BMO$ とする．2つの正方形（又は，弧）$I_0 \subseteq I$ があれば，次の不等式が成立．

a)　$|f_{I_0} - f_I| \le \frac{|I|}{|I_0|}\|f\|_*$

b)　$|f_{I_0} - f_I| \le e\left(1 + \log\frac{|I|}{|I_0|}\right)\|f\|_*$.

証明　a) $|f_{I_0} - f_I| = \frac{1}{|I_0|}\left|\int_{I_0}(f - f_I)\,dm\right|$

$$\le \frac{1}{|I_0|}\int_I |f - f_I|\,dm \le \frac{|I|}{|I_0|}\|f\|_*$$

b)　$I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_m = I$ なる増加列で

$$|I_k| = e|I_{k-1}| \quad (1 \le k < m), \quad |I_m| \leqq e|I_{m-1}| = e^m |I_0|$$

となるものを取る．$m \le 1 + \log\frac{|I|}{|I_0|}$ に注意すれば，a)を使って

$$|f_{I_0} - f_I| \le \sum_{k=1}^{m-1}|f_{I_{k-1}} - f_{I_k}| + |f_{I_{k-1}} - f_I|$$

$$\leq e m \|f\|_* \leq \left(1 + \log \frac{|I|}{|I_0|}\right) \|f\|_* \quad //$$

上の補題は，次節で使うためのものであるが，ここでは，この補題を使って BMO/$\mathbb{C}$ が Banach space となることを示めしておく．

<u>定理</u> 2.6.　BMO 空間は complete である．

<u>証明</u>　$\mathbb{R}^n$の場合に示めそう．$\|f_n - f_m\|_* \to 0$ $(n, m \to \infty)$ とする．$\underbrace{\text{正方形}}_{I_0}$を一つ固定する．このとき，すべての n に対して，$(f_n)_{I_0} = 0$ と仮定してよい．任意の正方形 I に対して，I_0 と I の両方を含む正方形 I' を取って固定すると

$$\begin{aligned} |(f_n)_I - (f_m)_I| &\leq |(f_n - f_m)_I - (f_n - f_m)_{I'}| \\ &\quad + |(f_n - f_m)_{I'} - (f_n - f_m)_{I_0}| \\ &\leq e\left(1 + \log \frac{|I'|}{|I|} + 1 + \log \frac{|I'|}{|I_0|}\right) \|f_n - f_m\|_* \end{aligned}$$

ここで，最後の不等式を得るために前補題を用いた．これより，$(f_n)_I$ がある数 a_I に収束することがわかった．次に，

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|}\int_I |f_n - f_m|\, dm &\leq \frac{1}{|I|}\int_I |f_n - f_m - (f_n - f_m)_I|\, dm \\ &\quad + |(f_n)_I - (f_m)_I| \end{aligned}$$

右辺は 0 に収束するから，各 I 上では f_n は L^1 収束している．そこで，$I_k = 2^k I_0$ として，各 I_k 上で $f_n \to g$ (L^1) とすれば，g は I_kによらず a.e. に $\mathbb{R}^n$ 上 well-defined である．又，任意の正

Iに対しては，$I \subset I_k$なるものを考えれば，f_nはI上gにL^1収束している．よって，

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f_n - g - (f_n-g)_I|\,dm$$
$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{|I|}\int_I |f_n - f_m - (f_n-f_m)_I|\,dm$$
$$\le \sup_{m>n} \|f_n - f_m\|_*$$

従って，$f_n \to g$ in BMO が得られた．//

3. Poisson kernel とBMO関数

単位円の場合に考える．

$$P_t(\varphi-\theta) = \frac{1-t^2}{1-2t\cos(\varphi-\theta)+t^2}$$

をPoisson kernelとする．∂U上の関数$f \in L^1(d\theta)$は

$$f(te^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_t(\varphi-\theta) f(e^{i\theta})\,d\theta$$

によって，U上の調和関数とも見なす．

定理 3.1. $f \in L^1(d\theta)$とする．$1 \le p < \infty$にのみ関数する定数C_pがあって

$$\frac{1}{2^p\pi}\|f\|_*^p \le \sup_{t,\varphi} \frac{1}{2\pi}\int P_t(\theta-\varphi)\,|f - f(te^{i\varphi})|^p\,d\theta \le C_p\|f\|_*^p.$$

証明 ∂U上の弧 $I = \{\theta : |\theta-\varphi| < 1-t\}$ $(1-\pi \le t < 1)$ があれば，$\cos\theta \ge 1 - \frac{\theta^2}{2}$ $(-\infty < \theta < +\infty)$ より

$$P_t(\varphi-\theta) \ge \frac{1-t^2}{1-2t\left(1-\frac{[1-t]^2}{2}\right)+t^2} = \frac{1}{1-t} \quad \text{for } \theta \in I.$$

よって，　$|I| = 2(1-t)$ より

$$\frac{1}{|I|}\int_I |f - f(te^{i\varphi})|^p d\theta \le \frac{1}{2}\int P_t(\varphi-\theta)\,|f - f(te^{i\varphi})|^p d\theta.$$

前節，系2.4 より第1の不等式が得られる．

第2の不等式を示すために，点 $te^{i\varphi}\in U$ を固定して，$I = \{\theta : |\theta-\varphi| < 1-t\}$ とおく．

$$\int_0^{2\pi} P_t(\theta-\varphi)\,|f - f(te^{i\theta})|^p d\theta \le 2^p \int_0^{2\pi} P_t(\theta-\varphi)\,|f - f_I|^p d\theta$$

であるから，この右辺を標価すればよい．$|t| < \frac{1}{2}$ ならば，$P_t(\theta) \le \frac{1+t}{1-t} \le 3$，$|I| > 1$．よって

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} P_t(\theta-\varphi)\,|f - f_I|^p d\theta &\le 3\int_0^{2\pi} |f - f_I|^p d\theta \\ &\le 3\cdot 2^{p-1}\cdot 2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f - f(0)|^p d\theta + |f(0) - f_I|^p\right).\end{aligned}$$

$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,d\theta$ であるから，補題2.5 より，$|f(0) - f_I| \le 2\pi\,\|f\|_*$．

$|t| \ge \frac{1}{2}$ のときは，今の方法をより精密に行なう．$\varphi = 0$ として一般性を失わない．$I_k = e^k I$，$N = \max\{k : e^k(1-t) < \frac{\pi}{2}\}$ として $I_\infty = [-\pi,\pi]\setminus I_N$ とおく．然らば，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} P_t(\theta)\,|f - f_I|^p d\theta &= \sum_{k=0}^{N}\int_{I_k\setminus I_{k-1}} + \int_{I_\infty} \\ &\le P_t(0)\int_I |f - f_I|^p d\theta + \sum_{k=1}^{N} P_t(e^{k-1}(1-t))\int_{I_k}|f - f_I|^p d\theta \\ &\quad + P_t(e^N(1-t))\int_{I_\infty}|f - f_I|^p d\theta.\end{aligned}$$

$|I| = 2(1-t)$ であるから，

(1)　$$P_t(0)\int_I |f - f_I|^p d\theta = \frac{1+t}{1-t}\int_I |f - f_I|^p d\theta \le 4\,\frac{1}{|I|}\int_I |f - f_I|^p d\theta.$$

又，$P_t(e^k(1-t)) \le \dfrac{e^{-2k}}{1-t}$ $\left(\because \cos\theta \le 1 - \frac{\theta^2}{3},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ より

$$P_t(e^{k-1}(1-t))\int_{I_k}|f - f_I|^p d\theta$$

$$\le \frac{e^{-2(k-1)}}{1-t}|I_k|\,2^{p-1}\left(\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k}|f-f_{I_k}|^p d\theta + |f_{I_k}-f_I|^p\right)$$

$$\le e^{-k+2}\,2^p\left(\frac{1}{|I_k|}\int_{I_k}|f-f_{I_k}|^p d\theta + e^p(1+k)^p\|f\|_*^p\right)$$

最後の不等式を得るのに補題2.5及び$|I_k| = e^k|I| = 2(1-t)e^k$を使った．$\sum_{k\ge 1} e^{-k}(1+k)^p < \infty$であるから，系2.3より

(2) $$\sum_{k=1}^{N} P_t(e^{k-1}(1-t))\int_{I_k}|f-f_I|^p d\theta \le c_p\|f\|_*^p.$$

同様に，$P_t(e^N(1-t)) \le 1-t^2 \le 1$ （$\because e^N(1-t) \ge \frac{\pi}{2}$）に注意して第3項を評価すると，

(3) $$P_t(e^N(1-t))\int_{I_\infty}|f-f_I|^p d\theta$$

$$\le 2\pi\cdot 2^{p-1}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f-f(0)|^p d\theta + |f(0)-f_{I_\infty}|^p\right)$$

$|I_\infty| = 2e^N(1-t) \ge \pi/e$であるから，補題2.5により$|f(0)-f_{I_\infty}| \le e\|f\|_*$．よって，(1)，(2)，(3)をまとめれば求める不等式が得られる．//

[注意] 1次変換$i\frac{1-z}{1+z}$によって，単位円を上半平面に等角に写像するとき，BMO($\mathbb{R}$)に対しても上半平面のPoisson kernelを用いて定理が成立つ．よって，この等角写像を媒介にして，BMO(∂U)とBMO($\mathbb{R}$)は同じ関数空間とみなされる．H^p $(1\le p<\infty)$については，$H^p(\partial U) \supsetneqq H^p(\mathbb{R})$であるからこれはtrivialなことではない．しかし，BMOがH^1のdual space（[5]）であるから，L^∞と近いものと考えれば，この事実は合理的である．

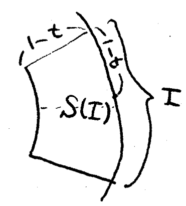
4. Carlson測度とBMO関数

開単位円板U上の正値

測度σについて，次の性質は同値である．

a) σはCarleson測度, i.e., $I=\{\theta : |\theta-\varphi|<1-t\}$ に対して，$S(I)=\{re^{i\theta} : |\theta-\varphi|\le 1-t<r<1\}$ (図を参照) とすれば，

$$A=\sup_{I}\ \sigma(S(I))/|I|<\infty$$



(便宜上，以下では $A=\|\sigma\|_{car}$ と書く)

b) 定数A'があって，

(4.1) $\int_U |f(z)|^2\,d\sigma(z)\le A'\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|^2\,d\theta$ for $f\in L^2(d\theta)$.

実際，A'がb)の最良定数とすると，絶対定数c，c'があって

(4.2) $$c'\|\sigma\|_{car}\le A'\le c\,\|\sigma\|_{car}.$$

この同値性の証明には興味深いものがあるが，多少準備を必要とするので省略する．(たとえば，[4]を参照)．

関数fのgradientを∇fと書き，$|\nabla f|^2=|\frac{\partial f}{\partial x}|^2+|\frac{\partial f}{\partial y}|^2$ とする．

定理4.2. (Fefferman-Stein[5]) $f\in BMO(\partial U)$ ならば

$$d\mu=(1-|z|)|\nabla f|^2\,dx\,dy$$

はCarleson測度で，逆も成立つ．より正確には，絶対定数c，c'があって

$$c'\|\mu\|_{car}\le\|f\|_*^2\le c\,\|\mu\|_{car}.$$

[注意] Douglas予想の証明に使われるのは，第1の不等式だけなので，ここでは第2の不等式の証明はしない．第1の不等式でも，実際に使われるのは，$f\in L^\infty$ のときで，このときは以下の証明より，直接 $c'\|\mu\|_{car}\le\|f\|_\infty^2$ が示される．こ

のことに注意すれば，Douglas予想の証明には，本節以降の結果だけでも十分である．

<u>補題</u> 4.2.　$f, g \in L^2(d\theta)$ かつ $\int_0^{2\pi} g\,d\theta = 0$ とする．このとき，

$$\frac{1}{\pi}\iint_U \log\frac{1}{|z|}\underbrace{\nabla f\cdot\overline{\nabla g}}_{\text{実内積}}\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\bar{g}\,d\theta$$

特に，$f \in L^2(d\theta)$ かつ $\int_0^{2\pi} f\,d\theta = 0$ ならば，

$$\frac{1}{\pi}\iint_U \log\frac{1}{|z|}|\nabla f|^2\,dx\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2\,d\theta.$$

<u>証明</u>　第2の等式を示せば，polarizationを使って一般の場合が得られる．よって，第2の等式を示す．$f \in L^2(d\theta)$ のFourier展開 $f \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ を考える．仮定より $a_0 = 0$．よって U 上では，$f(z) = \sum_{n>0} a_n z^n + \sum_{n<0} a_n \bar{z}^{|n|}$ と展開される．

$$|\nabla f|^2 = 2(|f_{\bar{z}}|^2 + |f_z|^2)$$

に注意すれば，項別微分により

$$|\nabla f|^2 = 2\left\{\left|\sum_{n<0}|n|\,a_n\bar{z}^{|n|-1}\right|^2 + \left|\sum_{n>0} n a_n z^{n-1}\right|^2\right\}$$

右辺を極座標を用いて積分してやれば

$$\frac{1}{\pi}\iint_U \log\frac{1}{|z|}|\nabla f|^2\,dx\,dy = \sum_{-\infty<n<\infty}|a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2\,d\theta$$

を得る．//

<u>定理 4.1 の証明</u>　$\int_0^{2\pi} f\,d\theta = 0$ としてよい．$z_0 = te^{i\varphi}$ を固定して，$I = \{\theta : |\theta-\varphi| < 1-t\}$ とおく．$1-|z| \le \log\frac{1}{|z|}$ on U に注意する．$|z_0| \le \frac{1}{2}$ ならば，

$$\mu(S(I)) \le \iint_{S(I)}\log\frac{1}{|z|}|\nabla f|^2\,dx\,dy \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f|^2\,d\theta$$

定理 3.1 より，$\mu(S(I)) \le C\,|I|\,\|f\|_*^2$（$C$は絶対定数），但 $|I| \ge 1$

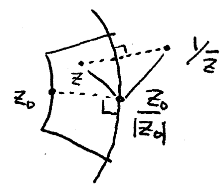
を使った．$|z_0|>\frac{1}{2}$ とする．

$$w=\frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}=u+iv$$

とおいて，$F(w)=f(z)$ と変数変換する．このとき，

$$|\nabla_w F|^2\,dw\wedge d\bar{w}=|\nabla_z f|^2\,dz\wedge d\bar{z}$$

$$1-|w|^2=\frac{(1-|z_0|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{z}_0 z|^2}$$



となる．また，$z\in S(I)$ ならば，

$$|1-\bar{z}_0 z|\leqq|z_0|\left(\left|1/\bar{z}-\frac{z_0}{|z_0|}\right|+\left|\frac{z_0}{|z_0|}-z\right|\right)\leq 4(1-t)$$

（図を参照）である．以上注意すると，

$$\iint_{S(I)}(1-|z|)\,|\nabla f|^2\,dx\,dy=\iint_{w(S(I))}\frac{|1-\bar{z}_0 z|^2(1-|w|^2)}{(1-|z_0|^2)(1+|z|)}\,|\nabla F|^2\,du\,dv$$

$$\leq\frac{16(1-t)^2}{1-t}\iint 2(1-|w|)\,|\nabla F|^2\,du\,dv$$

$$\leqq 32(1-t)\iint\log\frac{1}{|w|}\,|\nabla F|^2\,du\,dv$$

$$=16\,|I|\int_0^{2\pi}|F-F(0)|^2\,d\varphi,\quad(w=se^{i\varphi})$$

$$=16\,|I|\int_0^{2\pi}P_t(\theta-\varphi)\,|f(e^{i\theta})-f(z_0)|^2\,d\theta.$$

従って，定理3.1より，$|z_0|\geq\frac{1}{2}$ のときも

$$\mu(S(I))\leq C\,|I|\,\|f\|_*^2\quad(C：絶対定数)$$

を得る．//

5. Blashke product.　開単位円板U上の点列 a_n（重複も許す）が，$\sum_n(1-|a_n|)<\infty$ をみたせば，

$$b(z)=z^k\prod_{a_k\neq 0}\frac{|a_n|}{a_n}\,\frac{a_n-z}{1-\bar{a}_n z}\quad(k\text{は }a_n=0\text{ となる回数})$$

は収束して，a_nにおいてその重複回数の零点をもつ有界正則関数となる．実際，

$$|b(z)| < 1 \text{ on } U, \quad |b(e^{i\theta})| = 1 \text{ a.e. on } \partial U$$

となるので，$b(z)$は inner 関数になっている．

a_nがすべて互いに異っていて，nによらない数$\delta > 0$があって，

$$(*) \qquad \prod_{m \neq n} \left| \frac{a_n - a_m}{1 - \overline{a}_n a_m} \right| > \delta \qquad \text{for all } n$$

となるとき，$b(z)$は interpolating Blashke product と云われる．(*)が成り立てば，任意の有界複素数列c_nに対して，$f(a_n) = c_n$となるような有界正則関数fが存在し，この逆も云えるので interpolating という名がある．

6. Douglas 予想の証明

Chang [1] と Marshall [8] は結局次のことを証明した．

定理 6.1. Bを$H^\infty \subseteq B \subseteq L^\infty$なる closed subalgebra とする．このとき，Bにおいて invertible な interpolating Blashke product の族$\{b_\alpha\}$があって，BはH^∞と$\{\overline{b}_\alpha\}$により生成される，i.e.,

$$B = [H^\infty, \{\overline{b}_\alpha\}].$$

彼等の論文の中で本質的な部分は，それぞれ次の補題を示めすところにある．

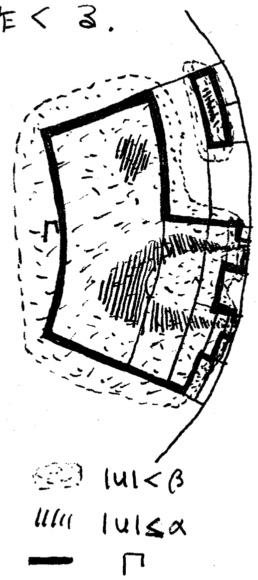
<u>補題</u> 6.2.(Marshall) $0<\alpha<1$ とすると, $\beta=\beta(\alpha)$; $\alpha<\beta<1$ なる数が存在して, 次の性質を満すように出来る: $u\in L^\infty$ かつ $\beta<u\leq 1$ a.e. on ∂U ならば, ある interpolating Blashke product $b(z)$ があって

a) $b(z)=0$ ならば $|u(z)|\leq\beta$

b) $|u(z)|\leqq\alpha$ ならば $|b(z)|\leq\frac{1}{10}$

となる.

<u>略証</u> まず, 長さが Caleson 測度となるような曲線 Γ を $\Gamma\subset\{z\in U \mid \alpha<|u(z)|<\beta\}$ となるように作る.



β を1に近ずけると, 領域 $\{\alpha<|u(z)|<\beta\}$ の幅が広くなる. 適当に β を定めて, このような曲線 Γ を作るのは, Caleson の作り方を修正して行なわれる. このような Γ が出来てしまえば, Γ 上に hyperbolic metric でほぼ等間隔に零点を配置して, その Blashke product を $b(z)$ とする. このとき, a) は自動的に満される. 又, Γ が Caleson 測度を与えることと, 零点が等間隔であることから, $b(z)$ は interpolating Blashke product であることも従う. 更に, この零点の間隔を適当に狭めておけば, Γ 上で $|b(z)|\leq\frac{1}{10}$ と容易に出来る. $|u|>\beta$ a.e. on ∂U であるから, Γ は a.e. に $\{|u(z)|\leqq\alpha\}$ を囲んでいる. よって, 最

大値の原理から，$|b(z)| \leq \frac{1}{10}$ が Γ で囲まれる領域上で成立つ.（実際に，上のような曲線 Γ を作ることは簡単ではない. くわしくは直接論文 [8] を参照されたい）//

補題 6.3.（Chang）$b \in H^\infty$ を inner 関数とする. $0<\delta<1$ に対して，$G_\delta = \{z \in U : |b(z)| > \delta\}$ とおく. 更に，$G_\delta \subseteq \{|z| \geq \frac{1}{2}\}$ と仮定する（$b(z)$ が定数でなければ，δ を 1 に近ずけることにより常に可能）. このとき，$f \in L^\infty$ が $0<\varepsilon<1$ に対して，

$$\|f\|_\infty \leq 1 \quad かつ \quad |f(z)| \geq 1-\varepsilon \quad \text{on } G_\delta$$

が成立つならば，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, d(fb^n, H^\infty) \leq C\sqrt{\varepsilon} \qquad (C：絶対定数)$$

略証 L^∞/H^∞ の dual space は $H_0^1 = \{g \in H^1 : g(0)=0\}$ である. 従って，

$$d(fb^n, H^\infty) = \sup\left\{\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} fb^n g\, d\theta\right| : g \in H_0^1,\ \|g\|_1 \leq 1\right\}$$

である. 右辺の中で，f を $f-f(0)$ で置き換えても積分の値は同じである. 又，$g \in H^1, \|g\|_1 \leq 1$ ならば，常に $g = g_1^2 + g_2^2$，$g_1, g_2 \in H^2$，$\|g_i\|_2 \leq 1$ と書くことが出来る. よって，

$$d(fb^n, H^\infty) \leqq 2\sup\left\{\frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}(f-f(0))\, b^n h^2\, d\theta\right| : h \in H^2,\ \|h\|_2 \leq 1\right\}$$

となる. 更に，H^∞ は H^2 の中で dense となっているので，必要ならば，$h \in H^\infty$ と仮定してもよい. 以下この積分を評価す

訳であるが，補題4.2により

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f-f(0))\,b^n h^2\,d\theta = \frac{1}{\pi}\iint_U \nabla f\cdot\nabla(b^n h^2)\log\frac{1}{|z|}\,dxdy.$$

右辺の積分は適当に分解することによって標価される．この際，G_δ の外では $|b|\le(1-\delta)$ ということから，$(1-\delta)$ の項が出る．又，

「$$d\mu = \chi_{G_\delta}(z)\,(1-|z|)\,|\nabla f|^2\,dxdy$$

が Carleson 測度で，しかも，$|f|\ge 1-\varepsilon$ on G_δ ならば

$$\|\mu\|_{Car}\le C_1\,\varepsilon \qquad (C_1：絶対定数)」$$

ということから，G_δ 上では $|\nabla f|^2\log\frac{1}{|z|}\,dxdy$ から $\sqrt{\varepsilon}$ の項が現れる．残りの部分では，$\|f\|_*\le 2\|f\|_\infty\le 2$，$\|b^n\|_*\le 2\|b^n\|_\infty\le 2$ ということから，定理4.2と不等式 (4.1)，(4.2) を使うことにより定数によっておさえることができる．最終結果は，

$$d(fb^n, H^\infty)\le C(\sqrt{\varepsilon}+n(1-\delta)^{n-1})\|h\|_2$$

である．$\|h\|_2\le 1$ より $n\to\infty$ とすれば求める主張が得られる．//

Chang の補題は，$d(fb^n, H^\infty) = d(f, \bar{b}^n H^\infty)$ であるから，

$$d(f, [H^\infty, \bar{b}])\le C\sqrt{\varepsilon}$$

ということを導びいている．

<u>定理6.1の証明</u>：$B_f=[H^\infty, f]$ を1つの element $f\in L^\infty$ を H^∞ に付加えて生成されたものとする．この場合に示めされれば，一般の場合は $B=\bigcup_{f\in B}[H^\infty, f] = \bigcup_{f\in B}[H^\infty,\{\bar{b}_\alpha, f\}] = [H^\infty,\{\bar{b}_\alpha, f\}]$ となる．よって，$B=[H^\infty, f]$ として考えれば十分．$f\notin H^\infty$ の

と考えればよい．更に，$[H^\infty, f] = [H^\infty, cf+d]$ （$c \neq 0$, $c, d \in \mathbb{C}$）であるから，f は B で invertible で $\|f\|_\infty \leq 1$ として考えればよい．又，$\log (H^\infty)^{-1} = L^\infty_{\mathbb{R}}$ （cf. [6]）より，invertible な元 $g \in H^\infty$ があって，$|g| = |f|$ a.e. となる．$u = fg^{-1}$ とおけば，$[H^\infty, f] = [H^\infty, u]$．しかも，$u^{-1} \in B$ となる．さて，$|u| = 1$ a.e. であるから，Marshall の補題によって，各 $0 < \alpha < 1$ に対して

a) $b_\alpha(z) = 0 \Rightarrow |u(z)| \leq \rho(\alpha)$

b) $|u(z)| \leq \alpha \Rightarrow |b_\alpha(z)| \leq \frac{1}{10}$

となるように，数 $\rho(\alpha) < 1$, interpolating Blashke product $b_\alpha(z)$ を取ることが出来る．$B = [H^\infty, \{\bar{b}_\alpha\}]$ となることを示めそう．$G^\alpha = \{z \in U : |b_\alpha(z)| > \frac{1}{10}\}$ とおく．b) より $G^\alpha \subseteq \{|u| > \alpha\}$．$u$ は定数でなく，$\|u\|_\infty = 1$ であるから，$|u(z)| \leq \alpha_0 < 1$ on $|z| \leq \frac{1}{2}$ である．よって，$\alpha_0 < \alpha < 1$ に対しては，$G^\alpha \subseteq \{|u| > \alpha\} \subseteq \{|z| > \frac{1}{2}\}$ となっている．Chang の補題により，

$$d(u, [H^\infty, \bar{b}_\alpha]) \leq \overline{\lim_n}\, d(u b_\alpha^n, H^\infty) \leq C(1-\alpha)^{1/2}.$$

$\alpha \to 1$ とすれば，$u \in [H^\infty, \{\bar{b}_\alpha\}]$．よって，$B \subseteq [H^\infty, \{\bar{b}_\alpha\}]$．逆の含包関係を示めすために，$H^\infty$, B, L^∞ の maximal ideal space をそれぞれ $M(H^\infty)$, $M(B)$, $M(L^\infty)$ と書く．H^∞ は $M(L^\infty)$ 上 logmodular であるから，各 $\varphi \in M(H^\infty)$ は $M(L^\infty)$ 上の表現測度を唯1つ持つ．よって，$M(B)$ は $M(H^\infty)$ の subset とみなせる．もし，仮に，$\varphi \in M(B)$ があって $b_\alpha(\varphi) = 0$ とすると，b_α が

interpolating Blashke product ということから，φ は $M(H^\infty)$ の中で b_α の零点の closure に含まれる（[6, p205]）．よって，a) により $|u(\varphi)| \leq \beta(\alpha) < 1$ となるべきであるが，

$$\varphi(u)\overline{\varphi(u)} = \varphi(u)\varphi(\bar{u}) = \varphi(u\bar{u}) = 1, \text{ i.e. } |\varphi(u)| = 1$$

ということに反する．従って，b_α は $M(B)$ 上では零点を取らず，よって B の invertible な元である．すなわち，$1/b_\alpha = \overline{b_\alpha} \in B$．これは，$[H^\infty, \{\overline{b_\alpha}\}] \subseteq B$ を示めす．//

上に述べて"定理の証明"は，N. Jwell (thesis, Univ. of Edinburgh, Scotland) によって簡易化されたものといわれる（cf. [3]）．

7． <u>その他の結果</u>　B を $H^\infty \leq B \subseteq L^\infty$ となる closed subalgebra とする．C_B を B で invertible な Blashke product から生成される L^∞ の C^*-subalgebra とすると，$B = H^\infty + C_B$（代数和）と書ける（Chang [2]）．更に，$H^\infty \cap C_B$ と C_B の間の closed subalgebra に関しても，Douglas の性質が成立つ（Chang-Marshall [3]）：すなわち，D を $H^\infty \cap C_B \subseteq D \subseteq C_B$ なる closed subalgebra とすると，D で invertible な Blashke product から生成される C^*-algebra を $C_{B,D}$ として，$D = H^\infty \cap C_B + C_{B,D}$（代数和）となる．これらの結果により，第1節で述べた図式を補えば，次頁のようになる．その図で，〰〰〰 部分では Douglas の性質が成立する．又，$H^\infty \cap C_B + C$ が $H^\infty \cap C_B$ を含む closed subalgebra であることは容

易にわかる。よって，── 部分の間に真にはさまる closed subalgebra はない。

$$\begin{tikzcd}
& H^\infty \arrow[r, dash] \arrow[d, dashed, dash] & H^\infty+C \arrow[r, squiggly, dash] \arrow[d, dashed, dash] & H^\infty+C_B \arrow[r, squiggly, dash] \arrow[d, dashed, dash] & L^\infty \arrow[dl, dashed, dash] \\
& H^\infty\cap C_B \arrow[r, dash] \arrow[d, dashed, dash] & H^\infty\cap C_B+C \arrow[r, squiggly, dash] \arrow[d, dashed, dash] & C_B \arrow[dl, dashed, dash] & \\
\arrow[r, dotted, dash] & A \arrow[r, dash] & C & &
\end{tikzcd}$$

A と H^∞ の間の subalgebra については，まだ未知の部分が多い．J. Wermer が「A と H^∞ の間の closed subalgebra で Corona property を満すのはどんなものか？」と問うている．[3] は $H^\infty\cap C_B$ は corona property をもつことを示している．一方，D. Dawson が z と $(1-z)^i$ で生成される algebra は Corona property をもたないことを示したという (cf. [3])．ついでに云えば，A の subalgebra についても未解決の問題がある．また，H^∞ にどんな L^∞ の C^*-subalgebra $\tilde{C}$ を加えると，$H^\infty+\tilde{C}$ は closed subalgebra になるであろうか？

その他，このノートでは述べなかったが，関数 $f\in BMO$ が

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{|I|<\delta}\frac{1}{|I|}\int_I |f-f_I|\,dm = 0$$

となるとき，f は vanishing mean oscilation をもつという．簡単に VMO と呼ばれる．VMO 関数は Sarason によって研究され，単位円上で $(H^\infty+C)\cap(\bar{H}^\infty+C) = VMO\cap L^\infty$ という関係にある．これは，Chang [2] によって $H^\infty\subseteq B\subseteq L^\infty$ となる closed subalgebra

に一般化して, $VMO_B \cap L^\infty = B \cap \overline{B}$ を示している.

又, BMO 関数は singular operator や Hilbert transform とも関係して色々調べられている.

参考文献

1. S. Y. Chang, A characterization of Douglas subalgebras, Acta Math. 137 (1976), 81–89.
2. ———, Structure of subalgebras between L^∞ and H^∞, Trans. Amer. Math. Soc. 227 (1977), 319–332.
3. S. Y. Chang and D. E. Marshall, Some algebras of bounded analytic functions containing the disk algebra, in Lecture Note in Math. 604, Springer.
4. P. L. Duren, Theory of H^p spaces, Academic Press, 1970.
5. C. Fefferman and E. M. Stein, H^p spaces of several variables, Acta Math. 129 (1972), 137–193.
6. K. Hoffman, Banach Spaces of Analytic Functions, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962.
7. F. John and L. Nierenberg, On functions of bounded mean oscillation, Comm. Pure Applied Math. 26 (1961), 415–426.
8. D. E. Marshall, Subalgebras of L^∞ containing H^∞, Acta Math. 137 (1976), 91–98.